



TITLE:

制限時間付き混雑状態評価理論の構築について (第5回生物数学の理論とその応用)

AUTHOR(S):

大塚, 一路; 西成, 活裕

CITATION:

大塚, 一路 ...[et al]. 制限時間付き混雑状態評価理論の構築について (第5回生物数学の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 2009, 1663: 136-140

ISSUE DATE:

2009-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141003>

RIGHT:

制限時間付き混雑状態評価理論の構築について

東京大学工学研究科 大塚一路 (OHTSUKA Kazumichi)

Dep. Aeronautics and Astronautics Engineering,
University of Tokyo

東京大学工学研究科、科学技術振興機構さきがけ 西成活裕 (NISHINARI Katsuhiko)

Dep. Aeronautics and Astronautics Engineering,
University of Tokyo

PRESTO, Japan Science and Technology Corporation

概要 本研究では、混雑と待ち時間を前提とした施設利用客の満足度を制限時間付きで評価する理論構築を試みた。ここに、我々が考える評価量とは施設利用客に提供されるフリースペースで、制限時間とは人が我慢出来なくなる限界の待ち時間と同義である。本アプローチは、金融工学における正味現在価値法と非常に類似性があるので顧客の待ち時間が制限時間に近づくと人の効用が指数関数的に減少すると仮定して混雑評価の理論式を導出し、加えて実データに基づく評価量の実証分析も行った。

1 Introduction

人混みは、現代の社会において我々にストレスを及ぼす大きな要因の一つである。近年、混雑発生のメカニズムは物理学的な観点からも序々に解明されつつあるが混雑そのものをうまくコントロール・評価する手法を我々はまだ持ち合わせていない。そこで、我々は一つの試みとして金融工学における正味現在価値法の考え方を応用して混み具合を定量的に評価する手法/指標を本報告書で提案したい。金融工学では、有価証券の売買に関する約束事や投資タイミングのように形のないものに値段をつける術がデリバティブ理論として確立されており [1]、この手法は近年、実物資産やプロジェクトの価値評価に対しても適用され、リアルオプション理論として発展を遂げている [2]。我々はこれまでの研究において、評価の対象となる有価証券の価格変動ダイナミクスを ASEP [3, 4] と呼ばれる可解確率モデルに置き換えて人の行列長さに値段をつけることに成功している [5]。この理論の長所は、将来の混雑状況を考慮した上で、その価値を算出できる点にある。しかし、評価量の選択や理論構築の際に現れる割引率の解釈や実際の混雑データへの適用方法など幾つかの問題点も残っていた。そこで、これまでの理論を実際のインフラや顧客満足度 (CS; Consumer Satisfaction) に適用することを目指し、人が許容できる待ち時間を制限時間と解釈して混雑価値の定量化を行った。具体的には、ある混雑スペースにおける流入・流出の時間変化をロジスティック方程式として表現し、その現在価値の定量的な評価からインフラの価値を決定する。

本報告書の構成は、次節で混雑のモデル化および評価式の導出を行い、3 節で割引率の推定、4 節でインフラ評価の実証分析、5 節で結論を述べる。

2 混雑現象のモデル化と意思決定法

2.1 NPV 法

実物資産やプロジェクトへの投資など、意思決定のタイミングに関係する評価には、近年正味現在価値 (NPV; net present value) 法とリアルオプション (ROV; real option value) 法の 2 つが

頻繁に用いられている。ここでは、本報告で主に用いる NPV についてのみ説明を行うことにする。NPV 法の特徴は、1). 意志 (投資、事業参入・撤退など) を決定するのは現時点のみ、2). 投資を行うのは、評価対象の利得の期待値が正の時のみ、3). 評価対象の変動ダイナミクスの標準偏差は意思決定に反映されない、の3点である。以下で NPV 法の考え方を CS の枠組みにあてはめてゆく。

2.2 混雑の NPV の算出

本節では、待ち時間を含んだサービス提供に対する CS の定義を行う。まず、あるスペース (行列や人混みの出来る領域であれば何でもよい) の価値は、その領域が人によって占有されていない全フリースペース c_1 と同義であるとして

$$c_1(t) = I_{t'=t_0} - X_{\text{in}}(t) - \mu(t - t_0), \quad (2.1)$$

と仮定する。ここに $I_{t'=t_0}$ は、施設に訪れた累積流入人数ベースで考えた最大許容人数、 $X_{\text{in}}(t)$ は時刻 t における人の累積流入人数、 μ はその流出率で待ち行列理論における平均サービス率に対応する。つまり、 $(X_{\text{in}}(t) - \mu(t - t_0))$ が正ならば、フリーなスペースが減少することになる。施設のキャパシティはさらに

$$I_{t'=t_0} = X_{\text{in}}(t_0) + (N_{\text{max}} - N_{t'=t_0}), \quad (2.2)$$

と記述することが出来る。ここに $X_{\text{in}}(t_0)$ は後述の積分時に定数となる累積流入人数、 N_{max} はインフラスペースの最大許容人数、 $N_{t'=t_0}$ は $t = t_0$ における滞在人数である (図 1 を参照)。

サービスを受けるまでに提供されていた累積スペースを、顧客の受けたサービス量と仮定すると、各時刻におけるインフラの価値は $t = t_0$ を基準にして待ち時間 T まで提供されたフリースペースを積分することによって見積もることが出来、その時間平均 $\overline{\text{CS}}$ は

$$\overline{\text{CS}}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} c_1(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [I_{t'=t_0} - X_{\text{in}}(t') + \frac{N_{t'=t_0}}{T}(t' - t_0)] dt', \quad (2.3)$$

と表される。ここに $\mu = N_{t'=t_0}/T$ である。上述したように収容人数の閾値 $I_{t'=t_0}$ は各時刻 $t' = t_0$ において決定されるので、上記の積分においては一定値となる。

累積流入人数の従うダイナミクスをロジスティック方程式であると仮定すると、従うべき方程式と解は

$$\frac{dX_{\text{in}}(t)}{dt} = aX_{\text{in}}(t) - bX_{\text{in}}^2(t), \quad X_{\text{in}}(t) = \frac{aX_0 \exp(at)}{a + bX_0[\exp(at) - 1]}, \quad (2.4)$$

で与えられる。ここに X_0 は観測を始めた時刻 $t = 0$ においてインフラ内に滞在していた人数、 a 、 b は実データより推定されるべきパラメーターである。式 (2.4) を式 (2.3) に代入して積分を実行すると

$$\overline{\text{CS}} = I_{t'=t_0} + \frac{N_{t'=t_0}}{2} - \frac{a}{b} - \frac{1}{bT} \left[\log \frac{1 + c \exp(-a(t_0 + T))}{1 + c \exp(-at_0)} \right]. \quad (2.5)$$

が得られる。ここに $c = (a - bX_0)/(bX_0)$ である。

次に今回の新たな試みとして、先ほど定義された人が感じる満足度は待ち時間が増加すると共

に指数関数的に「割引かれる」と仮定すると先ほどのインフラの価値は、CS の現在価値評価という意味で

$$\begin{aligned}\overline{\text{NPV}}_{\text{CS}} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[I_{t'=t_0} - \frac{a}{b(1+c\exp(-at'))} + \frac{N_{t'=t_0}(t'-t_0)}{T} \right] \exp[-r(t'-t_0)] dt' \\ &= \frac{(I_{t'=t_0})}{rT} \frac{1-\exp(-rT)}{r} - \frac{a \exp(rt_0)}{bT} \left[\frac{\exp[(a-r)(t_0+T)] {}_2F_1[1, 1-\frac{r}{a}, 2-\frac{r}{a}, -\frac{e^{a(t_0+T)}}{c}]}{c(a-r)T} \right] \\ &\quad + \frac{a}{bT} \left[\frac{e^{at_0} {}_2F_1[1, 1-\frac{r}{a}, 2-\frac{r}{a}, -\frac{e^{at_0}}{c}]}{c(a-r)} \right] + \frac{N_{t'=t_0}}{T^2} \left[\frac{1-(1+rT)\exp(-rT)}{r^2} \right],\end{aligned}\quad (2.6)$$

となる。ここに ${}_2F_1[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$ は超幾何関数である。また、NPV は正の値の時のみ価値があるので

$$\overline{\text{NPV}}'_{\text{CS}} = \text{Max}[\overline{\text{NPV}}_{\text{CS}}, 0]. \quad (2.7)$$

を人の満足度を考慮した顧客満足度であるとする。以下、簡単のため $\overline{\text{NPV}}'_{\text{CS}} = \overline{\text{NPV}}_{\text{CS}}$ と表記する。

3 割引率の推定

本節では、行動経済学における成果 [6] を応用して、待ち時間の経過によって生じる効用 (満足度) の減少を、前節までに導入した割引率 r によって表現し、アンケート調査によって、これらの値の推定を行った。一般に、信頼性工学の分野では、系に何かしらの問題 (イベント) が発生する平均時間間隔 θ の逆数 (故障率) はパラメータ $r = 1/\theta$ の指数分布に従うと仮定して、システムの信頼性評価を行っている。ここで、 θ は平均故障間隔 (Mean time to failure; MTTF) と呼ばれる量であるが、本稿では θ を来客者がこれ以上我慢出来ない待ち時間として、平均許容時間 (Mean time to patience; MTTP) と呼ぶことにする。

割引率の推定では、「あなたは以下の混雑を何分まで待つことが出来ますか?」というアンケートを図 2 に示される 8 つのケースに対して行った。各質問の有効回答数は 40 人である。この時、信頼水準 $100 \times (1 - \alpha)\%$ の \hat{r} 、 $\hat{\theta}$ の両側信頼区間は

$$(\hat{r}_L, \hat{r}_U) = \left(\frac{\chi^2(2k, 1 - \frac{\alpha}{2})}{2T}, \frac{\chi^2(2(k+1), \frac{\alpha}{2})}{2T} \right) \quad (3.1)$$

$$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U) = \left(\frac{2T}{\chi^2(2(k+1), \frac{\alpha}{2})}, \frac{2T}{\chi^2(2k, 1 - \frac{\alpha}{2})} \right) \quad (3.2)$$

となる。ここに、 k は回答者数、 T は回答された許容時間の全回答者に関する総和 $\sum \theta$ 、添字 U , L は上限と下限を表している [7]。図 2 および表 1 からイライラしやすい「待ち」ほど割引率が高い (効用の減少が早い) ことが見て取れる。今回の推定では、最も割引率が高いものは、駅の券売機待ち ($\hat{r} = 0.24$, $\hat{\theta} = 4.06$ [min.]) であり、最も割引率が小さいものは、イベント会場の行列 ($\hat{r} = 0.027$, $\hat{\theta} = 36.03$ [min.]) であった。これは、楽しみにしていることや (電車の緊急停車など) 仕方のないことに対しては、かなり寛容な値が得られ、逆に ATM や券売機など事務作業や仕事に近いものには厳しい値が得られる事を示している。本理論では、MTTP とその信頼区間は、来客者の満足度が減少する危険な時間帯であると言えるので、いかにサービススペースがゆとりのあるものであったとしても、MTTP を超えれば、そのサービスの提供する価値は著しく減少することになってしまう。

4 NPV の実証分析

本節では、導出した NPV の実証分析の一例を示す。図 3 は、あるサービススペースへの累積流出および流入人数の時間変化を示している。一般に図中における、累積流入量と累積流出量の差は現在の時刻における滞在人数 $N_{t=t_0}$ 、二つの直線の水平方向の時間差が待ち時間 T と解釈出来る。累積流入人数は、ロジスティック方程式に従うと仮定しているので観測データより、そのパラメータを仮定すると $(a, b, X_0) = (7.09 \times 10^{-2}, 7.96 \times 10^{-5}, 34.50)$ となる。さらに、待ち時間の状況から、 $r = 0.24$ (MTTP = 4 分) を採用し、 $r = 0$ に対する CS の NPV 値を図 4 で比較した。すると割引率を導入しない場合は、待ち時間が長くても満足度は比較的大きな正の値をとるが、割引率を導入すると待ち時間が増加と共に満足度は減少するという傾向が確認出来た。これは、これまでに主に採用されていた人の回転率とスペースといった、顧客の気持ちの変化を無視した評価指標とは大きく異なる点であり、我々の直観と一致する結果でもあるとも言える。

5 結論

本研究では、金融工学と行動経済学の理論を用いて、混雑の価値を定量的に評価する手法の導出および実証分析を行った。その結果、インフラの CS を NPV 形式で導出することに成功し、実データを用いた実証分析から、我々の直観に沿う形で従来の評価理論を改善することに成功した。この理論の新規性は人の気持ちを数理モデルに組み込んだ点である。また、実証分析の簡便性から本指標はあらゆるインフラに容易に導入出来るので、本研究が実社会におけるインフラに「無意識に感じる快適さ」を組み込む、ささやかなきっかけとなれば幸いである。

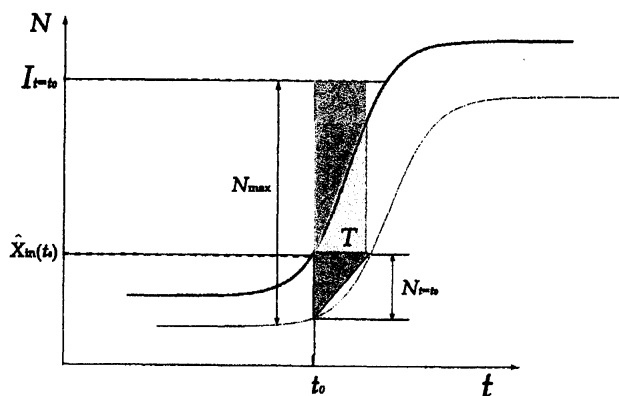


図 1: 定義変数の対応図

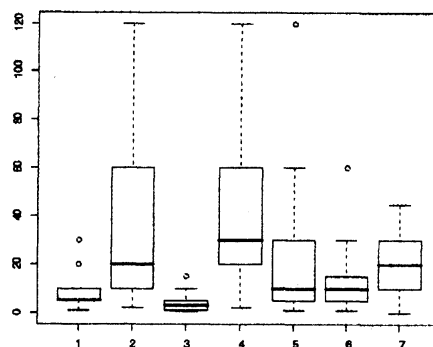


図 2: アンケート結果の箱ひげ図表示。縦軸: MTTP[min.], 横軸:(左から順に) 1. 銀行 ATM、2. 空港の入国審査、3. 駅の券売機、4. イベント会場の行列、5. 電車の緊急停車、6. イベント会場のトイレ、7. 人気飲食店の行列。

参考文献

- [1] J. Hull: "Options, Futures and Other Derivatives", 6th ed. Princentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (2005)
- [2] A. K. Dixit, R. S. Pindyck: "Investment under uncertainty", Princeton Univ. Press (1994)

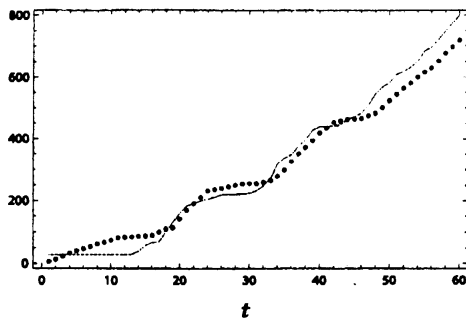


図 3: 累積流入人数 (実線) と累積流出人数 (点線) の時間変化 (某機関のサービス待ちにおける人の流れを観測)。

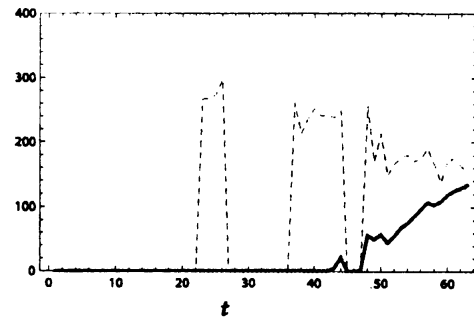


図 4: \overline{NPV}_{CS} の比較図。 $N_{\max} = 300$ 、 $r = 0.24$ (点線), $r = 0$ (実線)。

表 1: MTTP と割引率の推定値および 95% 信頼区間

	1	2	3	4	5	6	7
MTTP 推定値 $\hat{\theta}$	9.25	32.19	4.06	36.03	24.42	11.67	20.00
下限値 $\hat{\theta}_L$	7.18	22.1	3.14	27.9	18.94	9.05	15.51
上限値 $\hat{\theta}_U$	12.07	37.3	5.29	47.0	31.85	15.22	26.09
割引率 \hat{r}	0.108	0.031	0.24	0.027	0.041	0.086	0.05
下限値 \hat{r}_L	0.082	0.026	0.18	0.021	0.031	0.065	0.038
上限値 \hat{r}_U	0.139	0.045	0.31	0.035	0.052	0.11	0.064

- [3] B. Derrida, V. Hakim and V. Pasquier: "Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation", J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 1493-1517 (1993)
- [4] A. B. Kolmeisky, G. M. Schütz, E. B. Kolmeisky and J. P. Straley: "Phase diagram of one-dimensional driven lattice gases with open boundaries ", J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6911-6919 (1998)
- [5] K. Ohtsuka and K. Nishinari: (in preparation)
- [6] 友野典男: 行動経済学, 光文社新書 (2006)
- [7] Epstein, B. and M. Sobel: Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution , Ann. Math. Stat., Vol. 25, pp.373-381 (1954)